Mathématiques de la décision

Partie I

IG3

Information pratiques

Composition de l'UE : 2 parties disjointes, 2 groupes

Partie I :

- Intervenant : André Harnist, Batiment 9, Bureau 115
- Contact : andre.harnist@umontpellier.fr
- CM-TD : 13 séances
- TP : 4 séances

Evaluations

Contrôle continu :

- 1 épreuve de 1h le 26 novembre à 8h
- 1 TP noté

Examen : 1 épreuve

Note finale : $\dfrac{\text{Moyenne CC} + 2\ \text{Examen}}{3}$

Programme de l'UE

Chapitre I : Algèbre linéaire

1. Notion de matrice
2. Système d'équations linéaires
3. Méthode du pivot de Gauss

Chapitre II : Optimisation linéaire

1. Approche graphique en dimension 2
2. Méthode du simplexe

Chapitre I : Algèbre linéaire

Matrice

Définition. On appelle matrice, un tableau de nombres délimité par deux parenthèses.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & 4i - 1 \\ \frac{5}{3} & \alpha \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 3^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 3^n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Taille d'une matrice

Soit $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, des entiers non nuls.

Définition. On définit $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ de taille $n \times m$: à n lignes et m colonnes.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 9 \\ -1 & 11 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Notation. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de taille n.

Coefficients d'une matrice

Notation. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On peut noter $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ pour expliciter les coefficients de A. Le réel $a_{i,j}$ correspond au coefficient de la ligne i et la colonne j de A.

Exemple.

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix}.$$

On peut écrire $A = (a_{i,j})_{i,j}$ si la taille de A est connue.

Diagonale d'une matrice

Définition. Dans un matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle diagonale de A, la diagonale partant du coin supérieur gauche vers le coin inférieur droit.

Exemple. Les coefficients diagonaux sont en rouge :

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -6 & 42 & 13 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. Il ne faut pas confondre la diagonale avec l'anti-diagonale partant du coin inférieur gauche vers le coin supérieur droit.

Trace d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, on appelle trace de A, la somme des coefficients diagonaux de A et on la note $\mathrm{tr}(A)$.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 18 & 17 & 0 \\ 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

La trace de cette matrice est $\mathrm{tr}(A) = -7 + 17 + 5 = 15$.

Matrices diagonale et triangulaire

Définition. On dit qu'une matrice est diagonale si tous ses coefficients non-diagonaux sont nuls. On note parfois

$$\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si les coefficients au-dessus (resp. en dessous) de la diagonale de A sont nuls.

Exemple.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire inférieure}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{diagonale}}.$$

Matrice nulle et matrice identité

Définition. On appelle matrice nulle de $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, la matrice de taille $n \times m$ composée uniquement de 0 et on la note $0_{n,m}$.

Définition. On appelle matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice carrée de taille n composée de 1 sur sa diagonale et de 0 ailleurs, et on la note

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_n .$$

Exemple. $I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Somme de matrices

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On définit la somme de A et B par

$$A + B \coloneqq (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+6 \\ -1+9 & 0+3 \\ 3+5 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 3 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Propriétés.

- On a $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $A + 0_{n,m} = A \quad \forall A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Produit de matrices

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. On définit le produit de A et B par

$$AB := \left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} \right)_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ -1 \times 3 + 0 \times 1 & -1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 3 + 6 \times 1 & 0 \times 0 + 6 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Propriétés.

- $A(B+C) = AB + AC \quad \forall A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})\ \forall B, C \in \mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{R})$.
- Si $A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ on n'a pas toujours $AB = BA$.
- $AI_n = I_nA = A \quad \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Produit de matrices par un scalaire

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le produit par un scalaire de A par λ comme

$$\lambda A := (\lambda a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Exemple.

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 0 \\ 3 \times 3 & 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Propriétés.

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) \quad \forall A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})\ \forall B \in \mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{R})$.

Matrice transposée

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On définit la transposée de A par

$$A^{\mathsf{T}} := (a_{j,i})_{i,j} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 9 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut voir A^{T} comme la symétrie de A par rapport à sa diagonale (prolongée si A n'est pas carrée).

Propriétés.

- $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A \quad \forall A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $(A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}} \quad \forall A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} \quad \forall A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \ \forall B \in \mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{R})$.

Sous-matrice

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On appelle sous-matrice de A, une matrice ne conservant que certaines lignes et colonnes de A.

Notation. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on note $A_{i,j} \in M_{n-1,m-1}(\mathbb{R})$ comme la matrice A privée de la ligne i et de la colonne j.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Attention à ne pas confondre la sous-matrice $A_{i,j}$ avec le coefficient $a_{i,j}$ de A.

Déterminant - définition

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On note $\det(A)$, ou $|A|$, le déterminant de A, et on le définit de manière récurrente par rapport à n :

- $n = 1$: $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} := a$.
- $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a\begin{vmatrix} d \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c \end{vmatrix} = ad - bc$.
- $n = 3$: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} := a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = \dots$
- $n = 4$: $\dots$

Plus précisément, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} |A_{i,j}|.$$

Opérations sur le déterminant

Propriétés.

- $|A^\mathsf{T}| = |A| \quad \forall A \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $|AB| = |A||B| \quad \forall A \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R})\ \forall B \in \mathbf{M}_{m,p}(\mathbb{R})$.

Propriétés.

- Permuter deux lignes change le déterminant de signe.
- Multiplier une ligne par un scalaire λ multiplie le determinant par λ.
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes ne change pas la valeur du déterminant.
- Si une ligne est nulle, le déterminant est nul.
- Les précédents points sont valides pour les colonnes.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Déterminant - Exemple

Exemple. On fait apparaître des 0 pour obtenir le déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{L_3 \to L_3 + \frac{1}{3} L_2} \\
&= (1 \times 3 \times 2) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Inversibilité et matrice inverse

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est inversible si il existe une matrice, notée $A^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, tel que

$$A^{-1}A = I_n = AA^{-1}.$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A \text{ est inversible}\}$.

Remarque. Une seule des deux égalités ci-dessus suffit pour impliquer l'autre.

Proposition. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Propriétés.

- $(A^{-1})^{-1} = A \quad \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- $(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^{-1} \quad \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- $|A^{-1}| = |A|^{-1} \quad \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Matrice inverse - formule de la comatrice

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la comatrice de A par

$$\mathrm{com}(A) := \left((-1)^{i+j}|A_{i,j}|\right)_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A^{-1} := \frac{1}{|A|}\mathrm{com}(A)^{\mathsf{T}}.$$

Exemple. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $ad \neq bc$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |d| & -|c| \\ -|b| & |a| \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Matrice inverse - Exemple

Exemple. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

On a $|A| = 6 \neq 0$ (c.f. diapo 34) donc A est inversible, et

$$\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 17 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ 17 & -1 & -9 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Équation linéaire

Définition. Une *équation linéaire* est une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k$, où $a_1, \ldots, a_n, k$ sont des scalaires donnés et $x_1, \ldots, x_n$ sont les inconnues.

Exemple.

- $3x + 2y - z + 3t = 4$ est une équation linéaire.
- $\sin(x) + 3y = 0$ n'est pas une équation linéaire.
- $x + y + 2z - t - 1$ n'est pas une équation (linéaire).
- $(3 + x)^2 - 2y + z = x^2$ est une équation linéaire.

Système d'équations linéaires

Définition. Un système d'équations linéaire est un ensemble d'équations linéaires, généralement liées par les mêmes inconnues.

Exemple.

$$(S_1)\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 2x & -y & +3z & = & 1 \\ -x & +2y & +z & = & 3 \end{cases}$$

Convention. Lorsque ce n'est pas précisé, les inconnues vivent dans le même ensemble que les coefficients donnés. Donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ dans (S_1).

Définition. Une solution de (S_1) est un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant simultanément les trois équations.

Système d'équations linéaire - Solutions

Proposition. Un système d'équations linéaires admet soit 0, soit 1, soit une infinité de solutions.

Exemple.

- $\{0 = 1$ n'admet aucune solution.
- $\{x = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
- $\{x = x$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

Du système à l'équation matricielle

On rappelle le système d'équations linéaires

$$(S_1)\left\{\begin{array}{cccc} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 2x & -y & +3z & = & 1 \\ -x & +2y & +z & = & 3 \end{array}\right. .$$

On pose

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; X \coloneqq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En voyant le vecteur d'inconnues X comme une matrice de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut voir que le produit AX existe et que le système (S_1) équivaut à l'équation

$$AX = B.$$

Passage en matrice augmentée

Définition. On définit alors la matrice augmentée du système (S_1) par la jonction de A et B :

$$[A|B] \coloneqq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Remarques.

- On pourra donner directement la matrice augmentée d'un système sans définir A et B.
- Résoudre un système en passant par sa matrice augmentée allège l'écriture.
- Les inconnues sont fixées par chaque colonne de la matrice ce qui permet d'éviter des erreurs.

Systèmes - matrices augmentées équivalents

Définition. Deux systèmes d'équations linéaires sont dits équivalents si ils admettent le même ensemble de solutions et on les relie par le symbole $\Leftrightarrow$. De même pour leur matrices augmentées.

Exemple. On multiplie la première ligne par 2 :

$$\begin{cases} x & +y & +4z & -3t & = & 1 \\ 2x & +3y & +t & -z & = & 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & +2y & +8z & -6t & = & 2 \\ 2x & +3y & -z & +t & = & 13 \end{cases}_{L_1 \leftarrow 2L_1}.$$

On peut faire de même avec la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 13 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 8 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 13 \end{array}\right)_{L_1 \leftarrow 2L_1}.$$

Opérations sur les lignes

Propriétés. Un système d'équations linéaires reste équivalent lorsqu'on effectue les opérations suivantes :

- Échange de deux lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne i par un scalaire non nul a, noté $L_i \leftarrow aL_i$.
- Ajout d'une combinaison linéaire des autres lignes à une ligne i, noté $L_i \leftarrow L_i + aL_j + bL_k + cL_l + \dots$ (les scalaires $a, b, c, \dots$ peuvent être nuls).

De même pour sa matrice augmentée.

Chapitre I : Algèbre linéaire

1. Notion de matrice

2. Système d'équations linéaires

3. Méthode du pivot de Gauss

Pivot de Gauss - Premier aperçu

Exemple. Appliquons la méthode du pivot de Gauss sur (S_1) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right)} \Leftrightarrow \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{4}{5}L_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} \end{array}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underset{L_3 \leftarrow \frac{5}{8}L_3}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)} \Leftrightarrow \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)} \Leftrightarrow \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underset{L_1 \leftarrow -2L_2 - 3L_3}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{array}\right. .$$

D'où, $(-3, -1, 2)$ est l'unique solution de (S_1).

Pivot et matrice échelonnée

Définition. Une matrice $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite échelonnée si le nombre de 0 précédent le premier coefficient non nul de chaque ligne est strictement croissant de ligne en ligne jusqu'à ce qu'il n'y reste que des 0.

Définition. Dans une matrice $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ échelonnée, on appelle pivot, le premier coefficient non nul de chaque ligne de A.

Exemple. Les matrices suivantes sont échelonnées, les pivots sont en rouge :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice échelonnée réduite

Définition. Une matrice $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ échelonnée est dite réduite si ses pivots valent 1 et si les coefficients au-dessus des pivots sont nuls.

Exemple. Les matrices suivantes sont échelonnées réduites :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode du pivot de Gauss

ALGORITHME. *(Méthode du pivot de Gauss)*
La méthode du pivot de Gauss est un algorithme opérant sur les lignes d'une matrice qui permet d'obtenir une forme échelonnée réduite :

1. Échelonnage.
   Pour chaque colonne, on fixe un pivot (en permutant si besoin, si il n'y a que des zéros on ne fait rien) et on fait apparaître des zéros en-dessous du pivot.
2. Réduction.
   Pour chaque ligne possédant un pivot, on divise la ligne par son pivot, et on fait apparaître des zéros au-dessus des pivots.

Algorithme du pivot de Gauss

ALGORITHME. *(Pivot de Gauss)*
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. L'algorithme suivant échelonne et réduit A (simultanément) colonne par colonne :

Début
    $p = 1$
    Pour j de 1 à m
        $k = \mathrm{argmax}_{p \leqslant i \leqslant n} |a_{i,j}|$
        Si $a_{k,j} \neq 0$
            $L_k \leftarrow \frac{1}{a_{k,j}} L_k$
            Si $k \neq p$: $L_k \leftrightarrow L_p$
            Pour i de 1 à n
                Si $i \neq p$: $L_i \leftarrow L_i - a_{i,j} L_p$
            Fin Pour
            $p \leftarrow p + 1$
        Fin Si
    Fin Pour
Fin

Matrice augmentée échelonnée réduite

Définition. Une matrice augmentée $[A|B]$ est dite échelonnée (resp. réduite) si A est échelonnée (resp. réduite).

Exemple. Matrice augmentée échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 12 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Solutions d'un système échelonné réduit

On peut facilement donner l'ensemble des solutions d'un système échelonné réduit.

Exemple.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 12 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & +12z & & & = & -2 \\ & y & -5z & & +2u & = & 0 \\ & & & t & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions de ce système est

$$\left\{(-2-12z,\ 5z-2u,\ z,\ 0,\ u)\,,(z,u)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Condition de compatibilité

Définition. Une matrice augmentée est dite compatible si son système associé admet au moins une solution.

Proposition. Une matrice augmentée échelonnée $[A|B]$ est compatible si et seulement si pour chaque ligne nulle de A, la même ligne de B est nulle elle aussi.

Exemple.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 11 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{compatible}}, \quad \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)}_{\text{incompatible}}, \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)}_{\text{compatible}}.$$

Pivot de Gauss - Second exemple

On échelonne la matrice augmentée suivante :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right)} \Leftrightarrow \underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}.$$

La matrice est compatible, il reste à la réduire :

$$M \Leftrightarrow \underset{L_2 \to \frac{1}{2} L_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \Leftrightarrow \underset{L_1 \to L_1 - 2L_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & & -3z & = 0 \\ & y & +z & = \frac{3}{2} \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions du système associé à M est :

$$\left\{ \left(3z, \frac{3}{2} - z, z\right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Matrice inverse - Pivot de Gauss

Théorème. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. La méthode du pivot de Gauss appliquée sur la matrice augmentée $[A|I_n]$ permet de déterminer l'inversibilité de A et son inverse si elle existe.

1. On échelonne $[A|I_n]$.
2. Si $[A|I_n]$ possède n pivots, alors A est inversible et on continue. Sinon, A n'est pas inversible et on s'arrête.
3. On réduit $[A|I_n]$.

Si A est inversible, on obtiendra $[I_n|A^{-1}]$.

Matrice inverse - Pivot de Gauss - Exemple

Exemple. Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

$$[A|I_n] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underset{L_3 \to L_3 + \frac{1}{3} L_2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)}$$

$[A|I_n]$ est sous forme échelonnée et possède $n = 3$ pivots donc A est inversible. Il reste à réduire $[A|I_n]$.

Matrice inverse - Pivot de Gauss - Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{L_3 \to \frac{1}{2} L_3,\ L_2 \to \frac{1}{3} L_2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_3 \\ L_1 \to L_1 - 3L_3}}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{21}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)} \Leftrightarrow \underset{L_1 \to L_1 - 2L_2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)}.$$

Par l'algorithme de Gauss, on a obtenu $[I_n|A^{-1}]$.

D'où, $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ 17 & -1 & -9 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.