Mathématiques de la décision

Partie I

Chapitre 2

IG3

Chapitre II : Optimisation

1. Problème d'optimisation linéaire
2. Méthode du simplexe

Problème d'optimisation linéaire

Définition. Un problème d'optimisation linéaire est de la forme

$$
(\mathcal{P}) \qquad
\begin{array}{rl}
\text{maximiser} & f \coloneqq c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + d \\
\text{sous la contrainte} & a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,n} x_n \leqslant b_1 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{m,1} x_1 + \cdots + a_{m,n} x_n \leqslant b_m \\
& x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,
\end{array}
$$

où les $a_{i,j}, b_j, c_i, d \in \mathbb{R}$ sont fixés et les $x_i \in \mathbb{R}$ sont les inconnues.

Solutions réalisable et optimale

Définition. On dit que $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une solution réalisable de $(\mathcal{P})$ si il vérifie toutes les contraintes de ce problème.

Définition. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des solutions réalisables de $(\mathcal{P})$ et on l'appelle ensemble réalisable.

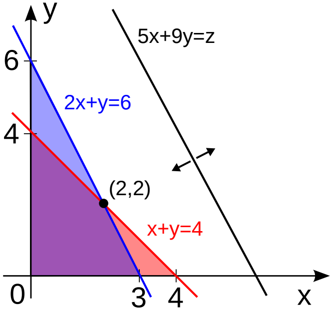
Définition. On dit que $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}$ est une solution optimale de $(\mathcal{P})$ si elle maximise la fonction objectif f sur l'ensemble réalisable :

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(y_1, \ldots, y_n) \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{P}.$$

Exemple en dimension 2

Exemple. On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & z = 5x + 9y \\ \text{sous la contrainte} \quad & x + y \leqslant 4 \\ & 2x + y \leqslant 6 \\ & x, y \geqslant 0. \end{aligned}$$



Des solutions réalisables sont par exemple $(0, 0)$ et $(0, 4)$.
La zone en violet représente l'ensemble réalisable.
La solution optimale est obtenue pour $(x, y) = (0, 4)$ et correspond à $z = 36$.

Cas possibles d'un problème d'optimisation

Proposition. La résolution d'un problème d'optimisation linéaire $(\mathcal{P})$ conduit vers 3 cas de figure possibles :

- Il n'y a pas de solution réalisable : $\mathcal{P} = \emptyset$.
  Exemple.
  $$\begin{array}{rl} \max & z = 3x - 2y \\ \text{s.c.} & x + y \leqslant -1 \\ & x, y \geqslant 0. \end{array}$$
- La fonction objectif n'est pas majorée sur $\mathcal{P}$.
  Exemple.
  $$\begin{array}{rl} \max & z = 3x - 2y \\ \text{s.c.} & y \leqslant 1 \\ & x, y \geqslant 0. \end{array}$$
- Il existe au moins une solution optimale pour $(\mathcal{P})$.
  Exemple.
  $$\begin{array}{rl} \max & z = 5 \\ \text{s.c.} & x + y \leqslant 1 \\ & x, y \geqslant 0. \end{array}$$

Chapitre II : Optimisation

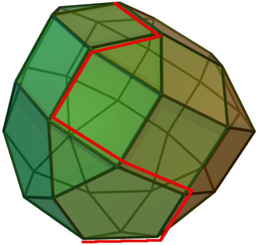
1. Problème d'optimisation linéaire

2. Méthode du simplexe

Méthode du simplexe - Objectif

L'ensemble réalisable d'un problème d'optimisation linéaire bien posé décrit un polyèdre dans l'espace. L'un des sommets est la solution optimale, mais il y a $\binom{m}{n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ sommets (n inconnues, m inéquations).

La méthode du simplexe est un algorithme permettant de trouver un chemin parmi les sommets de ce polyèdre jusqu'à celui correspondant à la solution optimale.



Méthode du simplexe - Premier aperçu

On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$
\begin{array}{ll}
\max & f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.c.} & \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leqslant & 5 \\ 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leqslant & 11 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leqslant & 8 \end{array} \\
 & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.
\end{array}
$$

On introduit les variables d'écart x_4, x_5, x_6 pour obtenir des égalités. Le problème suivant est équivalent au précédent :

$$
\begin{array}{ll}
\max & f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.c.} & \begin{array}{rrrrrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = & 5 \\ 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & = & 11 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & & +x_6 & = & 8 \end{array} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.
\end{array}
$$

Méthode du simplexe - Premier aperçu

Le problème est maintenant sous forme standard :

$$\begin{array}{lllllllll}
\max & f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.c.} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = & 5 \\
 & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & = & 11 \\
 & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & & +x_6 & = & 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.
\end{array}$$

1. Observons que $(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ est une solution réalisable du problème.
2. Augmenter x_1 dans cette solution augmente f et diminue $x_4, x_5, x_6 \geqslant 0$. La valeur maximale atteignable est $x_1 = \min(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{8}{3}) = \frac{5}{2}$ avec $x_4 = 0$.
3. On obtient la solution réalisable $(\frac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{2})$.

Méthode du simplexe - Premier aperçu

4. x_4 est saturée par x_1, on inverse leur rôle en utilisant la 1ère équation pour remplacer x_1 par les autres variables dans l'expression de f et les autres équations. On obtient le problème équivalent :

$$\max \ f = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$$

$$\begin{array}{llllllll} \text{s.c.} & x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & & & = & \frac{5}{2} \\ & & -5x_2 & & -2x_4 & +x_5 & & = & 1 \\ & & \frac{7}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & & +x_6 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.$$

5. Augmenter x_3 augmente f, sa valeur maximale atteignable depuis la solution réalisable $(\frac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{2})$ est $x_3 = \min(5, 1) = 1$ avec $x_6 = 0$.
6. On obtient la solution réalisable $(2, 0, 1, 0, 1, 0)$.

Méthode du simplexe - Premier aperçu

8. On permute le rôle de x_3 et x_6 grâce à la 3ième équation. On obtient le problème équivalent :

$$
\begin{array}{ll}
\max & f = 13 - 7x_2 - x_4 - x_6 \\
\text{s.c.} & \begin{array}{cccccccc}
x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & & & = & 4 \\
 & -5x_2 & & -2x_4 & +x_5 & & = & 1 \\
 & 7x_2 & +x_3 & -3x_4 & & +2x_6 & = & 1
\end{array} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.
\end{array}
$$

9. Augmenter x_2, x_4 ou x_6 diminue f, la solution $(2, 0, 1, 0, 1, 0)$ est donc optimale avec $f = 13$.

Variables d'écart et forme standard

Définition. Considérons le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$
(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & f = 2x_1 + 6x_2 + 9 \\ \text{s.c.} & \begin{array}{rrcr} 5x_1 & +7x_2 & \leqslant & 8 \\ 3x_1 & -x_2 & \leqslant & 17 \end{array} \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{array}
$$

On introduit les variables d'écart $x_3, x_4 \geqslant 0$ pour passer d'inéquations à des équations :

$$
(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & f = 2x_1 + 6x_2 + 9 \\ \text{s.c.} & \begin{array}{rrrrcr} 5x_1 & +7x_2 & +x_3 & & = & 8 \\ 3x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & 17 \end{array} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{array}
$$

Le problème est dit maintenant sous forme standard.

Problème standard sous forme matricielle

Définition. Considérons le problème standard suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & f = 2x_1 + 6x_2 + 9 \\ \text{s.c.} & \begin{array}{rrrrcl} 5x_1 & +7x_2 & +x_3 & & = & 8 \\ 3x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & 17 \end{array} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{array}$$

Posons $C \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d \coloneqq 9$,

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire $(\mathcal{P})$ sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{array}{ll} \max & f = CX + d \\ \text{s.c.} & AX = B \\ & X \geqslant 0. \end{array}$$

Écriture en matrice augmentée

Définition. On définie la matrice augmentée du problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{rl} \max & f = CX + d \\ \text{s.c.} & AX = B \\ & X \geqslant 0 \end{array}$$

par la jonction de A, B, C et $-d$ suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 17 \\ \hline 2 & 6 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right).$$

Remarques.

- La condition $X \geqslant 0$ est implicite.
- Il ne faut pas oublier de changer le signe de d dans la matrice augmentée.

Variable et solution de base

Définition. On peut choisir un ensemble de variables dont leur colonne dans A forment la matrice identité à permutation près, on les appellera variables de base.

Exemple.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 8 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

On peut choisir x_1, x_4 comme variables de base. Les variables hors-base sont donc x_2, x_3.

Définition. On appelle solution de base, la solution obtenue en posant les variables hors-base égales à 0.

Exemple. Dans l'exemple précédent, la solution de base est $(3, 0, 0, 6)$.

Méthode du simplexe

ALGORITHME. *(Méthode du simplexe)*
Considérons le problème sous forme standard dont la matrice augmentée est définie par :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -d \end{array}\right) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots\cdots & a_{m,n} & b_m \\ \hline c_1 & \cdots\cdots\cdots & c_n & -d \end{array}\right).$$

Hypothèse. On suppose que la solution de base est réalisable : $B \geqslant 0$ (i.e. $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0$).

L'algorithme du simplexe se définit par trois étapes que l'on répète en boucle jusqu'à ce qu'on ai atteint une des deux conditions d'arrêt.

Méthode du simplexe - Étape 1

Étape 1.

- Si $C \leqslant 0$, la solution de base est la solution optimale du problème et on s'arrête.
- Sinon, on définit l'indice de colonne suivant :

$$j \coloneqq \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\operatorname{argmax}} \{c_k : c_k > 0\},$$

Exemple.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -2 & -9 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 6 & -9 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$C \leqslant 0$ donc (0,0,6,3) est une solution optimale rendant la fonction objectif égale à 3

$j = 3$

Remarque. Si c'est un problème de minimisation, on posera $j \coloneqq \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\operatorname{argmin}} \{c_k : c_k < 0\}$ (si $C \geqslant 0$, on s'arrête).

Méthode du simplexe - Étape 2

Étape 2.

- Si la colonne j de A est négative, le problème est non borné et n'admet pas de solution optimale et on s'arrête.
- Sinon, on définit l'indice de ligne suivant :

$$i := \underset{1 \leqslant k \leqslant m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{b_k}{a_{k,j}} : a_{k,j} > 0 \right\},$$

Exemple.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -2 & 9 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 6 & -9 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la colonne $j=2$ de A est négative donc le problème est non borné et n'admet pas de solution optimale

$j=3, \ i=3$

Méthode du simplexe - Étape 3

Étape 3. On échelonne-réduit la matrice augmentée par rapport au pivot $a_{i,j}$.

Exemple. On échelonne-réduit par le pivot situé en $(3,3)$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 6 & -9 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{8} L_3}{\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 6 & -9 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 9L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 2L_3}}{\left(\begin{array}{cccccc|c} \frac{59}{8} & \frac{21}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{35}{4} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \hline -\frac{15}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)} \Rightarrow$$

Retour à l'étape 1 :
$C \leqslant 0$ donc $(0,0,\frac{3}{4},\frac{35}{4},0,0)$ est une solution optimale rendant la fonction objectif égale à $\frac{3}{2}$

Méthode du simplexe - Initialisation

INITIALISATION. Supposons que le problème sous forme standard, de matrice augmentée

$$M \coloneqq \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -d \end{array}\right) \coloneqq \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots\cdots & a_{m,n} & b_m \\ \hline c_1 & \cdots\cdots & c_n & -d \end{array}\right),$$

ne possède pas de solution de base réalisable.

Étape 1. On définit la variable artificielle $x_0 \geqslant 0$ et on considère le problème de minimisation suivant :

$$\widetilde{M} \coloneqq \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,n} & -1 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots\cdots & a_{m,n} & -1 & b_m \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & \qquad\qquad & x_n & x_0 \end{array} \end{array}.$$

Méthode du simplexe - Initialisation

Étape 2. On définit l'indice de ligne

$$i \coloneqq \underset{1 \leqslant k \leqslant m}{\operatorname{argmin}}\, b_k.$$

et on échelonne-réduit $\widetilde{M}$ par le pivot situé en $(i, n+1)$.

Étape 3. La matrice $\widetilde{M}$ admet maintenant une solution de base. On applique alors la méthode du simplexe sur $\widetilde{M}$.

Méthode du simplexe - Initialisation

Étape 4.

- Si $\widetilde{M}$ admet une solution optimale tel que sa fonction objectif vaut 0, alors
  1. on retire la colonne liée à x_0,
  2. on replace C et $-d$ dans $\widetilde{M}$,
  3. on échelonne $\widetilde{M}$ par rapport aux variables de base.

  On obtient alors un problème équivalent à M admettant un solution de base réalisable.
- Sinon, le problème initial M n'admet pas de solution optimale.

Dégénérescence - cyclage - Boucle infinie

Exemple. *Beale (1955)*

$$\min \quad f = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$(B) \quad \begin{array}{lrrrrcl} \text{s.c.} & \dfrac{x_1}{2} & -\dfrac{11x_2}{2} & -\dfrac{5x_3}{2} & +9x_4 & \leqslant & 0 \\ & \dfrac{x_1}{2} & -\dfrac{3x_2}{2} & -\dfrac{x_3}{2} & +x_4 & \leqslant & 0 \\ & x_1 & & & & \leqslant & 1 \\ & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.} \end{array}$$

En appliquant la méthode du simplexe sur le problème (B), on finit par retomber sur le problème de départ.
Il existe des méthodes pour palier à ce problème :

- méthode des perturbations
- règle du plus petit indice
- méthode lexicographique

Méthode des perturbations

La méthode des perturbations consiste à ajouter des paramètres dans le problème afin de contourner la dégénérescence, assez petits pour avoir une bonne approximation de la solution.

Exemple. *Beale (1955)*

$$
(B)\quad
\begin{array}{llllll}
\min & f = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 & & & & \\
\text{s.c.} & \dfrac{x_1}{2} & -\dfrac{11x_2}{2} & -\dfrac{5x_3}{2} & +9x_4 & \leqslant\ 0 + \varepsilon_1 \\
 & \dfrac{x_1}{2} & -\dfrac{3x_2}{2} & -\dfrac{x_3}{2} & +x_4 & \leqslant\ 0 + \varepsilon_2 \\
 & x_1 & & & & \leqslant\ 1 + \varepsilon_3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. & & & &
\end{array}
$$

On peut poser $\varepsilon_k = \alpha^k$ où $\alpha = 10^{-3}$ par exemple.