TD1 - IG3 - 2020/2021

Mathématiques de la décision

---

1. Introduction aux matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 12 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Donner l'ensemble auquel appartient chaque matrice A, B et C.

(2) Les opérations suivantes sont elles possibles ? Si oui, les faire :

$$A+B,\ \ B+C,\ \ C+B,\ \ AB,\ \ BA,\ \ A^{\mathrm{T}}B,\ \ BC,\ \ CB,\ \ CBA,\ \ 8A,\ \ 0B$$

(3) Calculer la trace de B et C.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

(2) Les matrices A et B sont-elles inversible ? Calculer leur inverse dans le cas échéant.

(3) Les matrices A^{T} et B^{T} sont-elles inversible ? Donner leur inverse dans le cas échéant.

2. Systèmes d'équations linéaires

Exercice 3. Donner la matrice augmentée des systèmes d'équations linéaires suivants, puis les résoudre :

$$(\mathrm{S1}) \begin{cases} 3x+5y=0 \\ x-y=2 \end{cases},\ (\mathrm{S2}) \begin{cases} 3x+5y+z=0 \\ x+z=3x \end{cases},\ (\mathrm{S3}) \begin{cases} y+8z+t=0 \\ 3x+8y+5t+z=1 \\ 3z-2y=x \end{cases},\ (\mathrm{S4}) \left\{ x+t=2 \right.,\ (\mathrm{S5}) \begin{cases} x=2y \\ 2y=x \end{cases}.$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivant :

$$(\mathrm{S1}) \begin{cases} x & +3y & = & 1 \\ 2x & +6y & = & 2 \end{cases},\quad (\mathrm{S2}) \begin{cases} -x & +y & +z & = & \pi \\ x & +6y & +5z & = & 0 \\ 2x & +3y & -z & = & 2\pi \end{cases},\quad (\mathrm{S3}) \begin{cases} ax & -y & -z & = & 0 \\ -x & +ay & -z & = & 0 \\ -x & -y & +az & = & 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} ax & +y & -z & = & b \\ a^2x & -y & +z & = & 2b \\ a^3x & -y & -z & = & 3b \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) en fonction de a et b.

Exercice 6. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivant :

$$(\mathrm{S1}) \begin{cases} ix & +y & +z & = & i \\ x & +iy & +z & = & 1-i \\ x & +y & +iz & = & 1+i \end{cases},\quad (\mathrm{S2}) \begin{cases} jx & +y & = & 1+j \\ x & +jy & = & -j \end{cases}.$$

où $i, j \in \mathbb{C}$ vérifient $i^2 = -1$ et $j^2 + j = -1$.

Exercice 7. On considère le système d'équations linéaires $(\mathrm{S}) \begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

(1) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) selon a, b, c, d, e, f.

(2) Écrire le système sous sa forme matricielle $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(3) Déterminer lorsque A est inversible, et calculer A^{-1} le cas échéant.

(4) En déduire que $X = A^{-1}B$ lorsque le système admet une unique solution.

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des polynômes $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant

(1) $P(0) = 1,\ P(1) = 2$ et $P(2) = -1$.

(2) $P(0) = -1$ et $P'(1) = 0$.

Exercice 9. Existe-il des réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant : $a\cos(x) + b\sin(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Résoudre le système d'équations suivant :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x^2y^3z & = & 1 \\ x^3yz^4 & = & 3\ , \\ xy^4z^2 & = & 2 \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{R}_+^*.$$

En supposant maintenant que $x, y, z \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (S) change-il ?

Exercice 11. Existe-il des réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_2^4 P(x) = aP(2) + bP(3) + cP(4), \quad \forall P \in \mathbb{R}_3[x],$$

où $\mathbb{R}_3[x]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

3. Déterminant et inverse de matrice

Exercice 12. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\begin{vmatrix} -16 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 13. Déterminer l'ensemble des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b^2 \\ 1 & 2ab & 1 \\ a^2 & 1 & b \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 14. Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour déterminer l'inverse, si elle existe, des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Applications

Exercice 15. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$. Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

(1) Montrer que le dénominateur de f admet 3 racines $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \dfrac{a}{x - x_1} + \dfrac{b}{x - x_2} + \dfrac{c}{x - x_3}$.

(3) En déduire une primitive de f et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est *diagonaliser* A pour calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Calculer $\det(A - \lambda I_3)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) En déduire que le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ s'annule pour deux valeurs $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$.

(3) Déterminer E_1 (resp. E_2), l'ensemble des solutions du système associé à la matrice augmentée $[A - \lambda_1 I_3 | 0_{3,1}]$ (resp. $[A - \lambda_2 I_3 | 0_{3,1}]$).

(4) Remarquer qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_1 = \{av_2 + bv_3, a, b \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{av_1, a \in \mathbb{R}\}$.

(5) On considère la matrice $P = [v_1\ v_2\ v_3]$. Déterminer l'inverse de P.

(6) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

(7) Montrer qu'on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(8) Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(9) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.